

微積分 試題 (限用答案本作答)

1. 求下列函數的導函數 (即求 $\frac{df(x)}{dx}$).

20% (i) $f(x) = (6x^2 + 1)^3$ (ii) $f(x) = \frac{4x^2 + 2x}{x-1}$, (iii) $f(x) = X^{2x}$

(iv) $f(x) = \int_{2x}^1 e^{t^2} dt$ (v) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{當 } x > 0 \\ \sin x & \text{當 } x \leq 0 \end{cases}$

2. 是非題, 判斷下列敘述是否為真.

20% (i) 若 $f'(x) = g'(x), \forall x$, 則 $f(x) = g(x), \forall x$.

(ii) 若 $f'(c)$ 存在, 則 f 在 c 處連續.

(iii) 若 $f'(3) = g'(3) = 0$ 且 $h(x) = f(x)g(x)$, 則 $h'(3) = 0$.

(iv) 若 $f'(3) = g'(3) = g(3) = 3$ 則 $(f \circ g)'(3) = 3$.

(v) 若 f 在區間 I 是可微分且遞增函數, 則 $f'(x) > 0, \forall x \in I$.

(vi) 若 $\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$, 則 $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$.

(vii) $\lim_{h \rightarrow 0} (1-h)^{-\frac{1}{h}} = e^{-1}$.

(viii) $\pi^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln \pi}$

本試題係兩面印刷

(ix) 若 $a \ln x < b \ln x$, 則 $a < b$.

(x) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$, 則 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3g(x)) = 0$.

接下頁

3. 求下列積分。

20% (i) $\int_1^2 t\sqrt{t^2-1} dt$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$

(iii) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

(iv) $\int_0^{1/2} \frac{5x-1}{x^2-1} dx$

(v) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

4. 求下列極限值。

20% (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^{x^2}$

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \sqrt{1+e^t} dt}{x}$

5. 已知 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 32}{2x - 4}$

(i) 試問 f 在何處遞增, 何處遞減?

(ii) 試求 f 的相對極大值與相對極小值?

(iii) 試問 f 在何處上凹 (Concave up) 何處下凹 (Concave down).

(iv) 試求 $y = f(x)$ 的漸近線?

本試題係兩面印刷

(v) 試描繪出 $y = f(x)$ 的圖形。