線性代數 試題 （限用答案本作答）

◎應用統計資訊碩士班線性代數測驗卷

※除了第壹題外，其他題必須寫下必要的過程，否則不給分，*請按照題號順序作答，每題10分共計100分*。

壹、 已知v1, v2 爲R^2之兩個*線性獨立*行向量,又A＝[v1,v2]爲一個2 ×2之矩陣,則 (是非題；回答*是*或*否*)

(a) A必爲可逆矩陣。 答案:_____(是、否)

(b) span({v1,v2 }) = R^2。 答案:_____(是、否)

(c) 對任何R^2向量**b**,方程組 A x = b 有解。 答案:_____(是、否)

(d) rank(A) = 2 。 答案:_____(是、否)

(e) A的兩個列向量爲線性獨立。 答案:_____(是、否)

(f) A經基本列運算必定可得到 I_2。 答案:_____(是、否)

(g) A必定可以正交對角化。 答案:_____(是、否)

(h) A必定有一個特徵值爲0。 答案:_____(是、否)

(i) **Nullity of A = 2** 。 答案:_____(是、否)

(j) det(A) = 0。 答案:_____(是、否)

以下第貳、參、肆、伍題可參考以下基本列運算之結果：

$$\text{且}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5 & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{基本列運算}} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 & -9 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

貳、 給予下列非齊次線性方程組，求解。

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z - 3t = 7 \\ 1x + 1y + 2z + 4t = 8, \\ 0x + 1y + 2z - 5t = 9 \end{cases}$$

參、 Let $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Find a matrix C such that $DC = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 8 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$.

肆、 $\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 1 \\ 1x + 1y + 2z = 0, \\ 0x + 1y + 2z = 1 \end{cases}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，已知 | D | ＝-1，利用 **Cramer's Rule**(克拉莫法則)求解左列線性聯立方程組(不使用克拉莫法則不給分)。

伍、 給予以下字母及數字對應表，利用矩陣D如上題以及[D | I]經過基本列運算後得到的結果。對下列已加密之訊息解碼(decode with matrix D)： 64 , 44, 25, 114, 70, 69 。

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

本試題係兩面印刷

線性代數 試題　　（限用答案本作答）

陸、 已知T爲線性轉換且T((1, 1))=(3, 2),T((1, 0))=(2, 3);又U爲另一線性轉換定義爲:
U((x, y)) = (2x + y, 3x - y)：

(a) 求T((0, 1))=?
(b) 分別寫下此兩個線性轉換所對應的矩陣？是否此兩個線性轉換相等，即 U = T ？
(c) 已知在平面上有某一三角形的面積爲10,試求此三角形經U線性轉換後的面積。
(d) 求Kernel of T以及Range of T.

柒、 令 S={(1, 0),(1, 2)}; T={(1, 1),(2, 1)}分別爲V = R^2之基底,u=(8, 6),試問:

(a) 求 $[u]_S$(即u對有序基底S的座標表達)？
(b) 求從S基底轉換至T基底之轉換矩陣 $P_{T<-S}$？
(c) 求$[u]_T$，必須使用(a)及(b)，否則不給分?

捌、 令$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$經列運算後得到$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

寫出下列關於A矩陣之子空間之一組基底（必須根據所給予回答；否則不予計分）：

(a) row space of A.
(b) column space of A.
(c) null space of A.
(d) 以此例子說明矩陣行數與nullity及rank間的關係式.

玖、 Let $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) Find the eigenvalues and **associated** eigenvectors of A.
(b) Find an orthogonal matrix P such that $P^{-1}AP = D$, a diagonal matrix.
(c) Find the eigenvalues of A^4.
(d) **Find $A^3 - 9A^2 - 10A$**

壹拾、Let W be the subspace of R^4 which is spanned by (1, 1, 1, 1) and (2, 1, 0,1)

(a) Applied the Gram-Schmidt process to find an orthonormal basis of W.
(b) Find the orthogonal projection of the vector v= (3, 2, 2, 0) on W.
(c) Find the distance from the vector v = (3, 2, 2, 0) to the subspace W.

本試題係兩面印刷　　試題完